

УДК: 537.867

Быстрый метод анализа возмущения электромагнитного поля малыми сферическими рассеивателями

К. М. Зейде^{1,a}, А. Ю. Вардугина^{1,b}, С. В. Марвин^{1,2,c}

¹Уральский федеральный университет,
Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19

²Технический университет УГМК,
Россия, 624091, г. Верхняя Пышма, Успенский просп., д. 3

E-mail: ^a k.m.zeyde@urfu.ru, ^b alisa-vardegina@mail.ru, ^c s.v.marvin@urfu.ru

Получено 01.06.2020, после доработки — 29.06.2020.

Принято к публикации 29.06.2020.

В данной работе рассматривается особая аппроксимация обобщенной формулы возмущения электромагнитного поля семейством электрически малых сферических неоднородностей. Задача, рассматриваемая в настоящей работе, возникает во множестве приложений технической электродинамики, радиолокации, подповерхностного зондирования и дефектоскопии. В общем случае она формулируется следующим образом: в некоторой точке возмущенного пространства необходимо определить амплитуду электромагнитного поля. Возмущение электромагнитных волн вызывается семейством электрически малых распределенных в пространстве рассеивателей. Источник электромагнитных волн располагается также в возмущенном пространстве. Задача решается введением допущения для дальнего поля рассеяния и через формулировку для эффективной поверхности рассеяния неоднородности. Это, в свою очередь, позволяет существенно ускорить вычисления возмущенного электромагнитного поля семейством идентичных друг другу сферических неоднородностей с произвольными электрофизическими параметрами. Аппроксимация проверяется путем сравнения получаемых результатов с решением обобщенной формулы для возмущения электромагнитного поля. В данной работе рассматривается только прямая задача рассеяния, тем самым все параметры рассеивателей являются известными. В этом контексте можно утверждать, что формулировка соответствует корректно поставленной задаче и не подразумевает решение интегрального уравнения в обобщенной формуле. Одной из особенностей предложенного алгоритма является выделение характерной плоскости на границе пространства. Все точки наблюдения за состоянием системы принадлежат этой плоскости. Семейство рассеивателей располагается внутри области наблюдения, которая формируется этой поверхностью. Данный подход, кроме всего прочего, позволяет снять ряд ограничений на использование обобщенной формулировки для возмущенного электрического поля, например требование по удаленности неоднородностей друг от друга в пространстве распространения электромагнитных волн. Учет вклада каждого рассеивателя в семействе неоднородностей производится путем перехода к значениям их эффективных поверхностей рассеяния и дальнейшего их суммирования с учетом возникающих волновых эффектов, таких как интерференция и многократное отражение. В статье приводятся и описываются ограничения предложенного метода, а также рассматриваются возможные его модификации и дополнения.

Ключевые слова: малые возмущения, распространения электромагнитных волн, эффективная поверхность рассеяния, аппроксимация дальнего поля, численное интегрирование

UDC: 537.867

Fast method for analyzing the electromagnetic field perturbation by small spherical scatterers

K. M. Zeyde^{1,a}, A. Yu. Vardugina^{1,b}, S. V. Marvin^{1,2,c}

¹Ural Federal University,

19 Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russia

²UMMC Technical University,

3 Uspenskiy av., Verkhnyaya Pyshma, 624091, Russia

E-mail: ^a k.m.zeyde@urfu.ru, ^b alisa-varugina@mail.ru, ^c s.v.marvin@urfu.ru

Received 01.06.2020, after completion — 29.06.2020.

Accepted for publication 29.06.2020.

In this work, we consider a special approximation of the general perturbation formula for the electromagnetic field by a set of electrically small inhomogeneities located in the domain of interest. The problem considered in this paper arises in many applications of technical electrodynamics, radar technologies and subsurface remote sensing. In the general case, it is formulated as follows: at some point in the perturbed domain, it is necessary to determine the amplitude of the electromagnetic field. The perturbation of electromagnetic waves is caused by a set of electrically small scatterers distributed in space. The source of electromagnetic waves is also located in perturbed domain. The problem is solved by introducing the far field approximation and through the formulation for the scatterer radar cross section value. This, in turn, allows one to significantly speed up the calculation process of the perturbed electromagnetic field by a set of a spherical inhomogeneities identical to each other with arbitrary electrophysical parameters. In this paper, we consider only the direct scattering problem; therefore, all parameters of the scatterers are known. In this context, it may be argued that the formulation corresponds to the well-posed problem and does not imply the solution of the integral equation in the generalized formula. One of the features of the proposed algorithm is the allocation of a characteristic plane at the domain boundary. All points of observation of the state of the system belong to this plane. Set of the scatterers is located inside the observation region, which is formed by this surface. The approximation is tested by comparing the results obtained with the solution of the general formula method for the perturbation of the electromagnetic field. This approach, among other things, allows one to remove a number of restrictions on the general perturbation formula for E-field analysis.

Keywords: small perturbations, electromagnetic propagation, radar cross section, far-field approximation, numerical integration

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1039–1050 (Russian).

© 2020 Kirill M. Zeyde, Alisa Yu. Vardugina, Sergey V. Marvin

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>

or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Задача, рассматриваемая в настоящей работе, возникает во множестве приложений технической электродинамики. В общем случае она формулируется следующим образом: в некоторой точке возмущенного пространства необходимо определить амплитуду электромагнитного поля. Возмущение электромагнитных волн вызывается семейством электрически малых распределенных в пространстве рассеивателей. Источник электромагнитных волн располагается в возмущенном пространстве.

Многими авторами отмечалось, что решение данной задачи особо актуально, например, для задач подповерхностной радиолокации и дефектоскопии [Colton, Piana, 1998; Cedio-Fengya et al., 1998; Vogelius, Volkov, 2000; Griesmaier, 2011]. Извлечение информации о магнитуде возмущенного поля, как на поверхности пространства, так и внутри него, является важнейшей задачей геофизических исследований при поиске полезных ископаемых в толще земной поверхности. Так, если на работающей в горизонтальном направлении буровой установке имеется радиолокационная станция, корректирующая траекторию ее хода в режиме реального времени (технология *logging-while-drilling* [Hong et al., 2014]), то значение рассеянного от неоднородности электромагнитного поля должно быть получено в точке, располагающейся внутри среды. Источник и приемник в этом случае располагаются в одной локализованной области (или вообще в одной точке). При решении задач дефектоскопии для обнаружения неоднородностей в среде обычно используется информация, получаемая на границе этой среды.

В работах [Zeyde, Vardugina, 2019; Li Na, 2000] рассматривается возможность манипулирования параметрами электродинамической системы малыми контролируруемыми возмущениями. Задача управления состоянием системы естественным образом является частным случаем обобщенного уравнения возмущения относительно переменных, которые могут варьироваться в заданном диапазоне значений. Близкая задача — параметрическая оптимизация. Теория возмущения была применена для получения так называемого калибровочного элемента минимальной магнитуды в [Зейде, Коротков, 2019]. Так, в неограниченное однородное пространство вносится сферический рассеиватель и рассматривается как объект, вызывающий минимальное возмущение падающего на него электромагнитного поля. Согласно формулировкам [Зейде, Коротков, 2019] рассеиватель является сферой, причем источника электромагнитного излучения в системе не присутствует. Искомые параметрами возмущения могут являться либо радиус сферы, либо ее электрофизические параметры. Функцией отклика является классическое решение задачи Ми для дифракции электромагнитных волн на диэлектрической сфере (см. [Li Na, 2000; Борн, Вольф, 1973]).

В данной работе формулировка задачи значительно усложняется. Во-первых, система, в которой осуществляется поиск решения, становится ограниченной — в ней присутствует плоскость, для которой формулируются особые граничные условия. Во-вторых, источник электромагнитных волн теперь располагается в возмущенном пространстве, а значит, система уравнений Максвелла становится неоднородной. В-третьих, в работе рассматривается возмущение семейством неоднородностей, т.е. формулируется задача дискретных разнесенных в пространстве рассеивателей (по примеру [Eremin et al., 1994]).

Формулировка задачи

В [Vogelius, Volkov, 2000] получена асимптотическая формула возмущения электромагнитного поля множеством электрически малых неоднородностей. В [Griesmaier, 2011] приведена обобщенная формула для трехмерного пространства. Алгоритмы разрешения модели для [Vogelius, Volkov, 2000; Griesmaier, 2011] совпадают, а основная сложность заключается в вычислении поверхностного интеграла при удовлетворении граничных условий. В работах [Colton,

Piana, 1998; Cedio-Fengya et al., 1998] описываются частные случаи рассматриваемой проблемы. В данной работе предлагается эффективный подход к решению прямой задачи [Vogelius, Volkov, 2000] для анализа возмущений электромагнитного поля семейством электрически малых идентичных сферических рассеивателей в присутствии границы и источника.

Исходным для нас выражением является формула, представленная в [Vogelius, Volkov, 2000], являющаяся частным случаем для системы с одним рассеивателем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{01}(\mathbf{x}) - \mathbf{E}^0(\mathbf{x}) = & - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{E}^{01}(\mathbf{y}) - \mathbf{E}^0(\mathbf{y})] \cdot \frac{\partial\Phi^k(x, y)}{\partial\nu(\mathbf{y})} ds(y) + \\ & + \rho^2 \left(1 - \frac{\mu_{r\Omega}}{\mu_{rB}} \right) \nabla_y \Phi^k(x, 0) \cdot M \left(\frac{\mu_{rB}}{\mu_{r\Omega}} \right) \nabla \mathbf{E}^0(\mathbf{0}) - \\ & - \rho^2 \omega^2 \mu_{r\Omega} \left(\epsilon_{r\Omega} - \epsilon_{rB} + j \frac{\sigma_{r\Omega} - \sigma_{rB}}{\omega} \right) \Phi^k(x, 0) \cdot |B| \mathbf{E}^0(\mathbf{0}) + O(\rho^{3-\delta}). \end{aligned} \quad (1)$$

Граничными условиями, которым необходимо удовлетворить, являются условия задачи Неймана для $\partial\Omega$:

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{01}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial \nu}.$$

Главная задача настоящей статьи — получить эффективный алгоритм решения уравнения (1) относительно неизвестной разности $(\mathbf{E}^{01}(\mathbf{x}) - \mathbf{E}^0(\mathbf{x}))$. В зависимости от того, в какой координате системы имеется априорная информация о напряженности электрического поля, уравнение (1) относительно указанной разности напряженностей электрического поля может быть как интегральным, так и неинтегральным. В данной работе рассматривается только прямая задача рассеяния, тем самым все параметры рассеивателей являются известными. В этом контексте можем заключить, что формулировка соответствует корректно поставленной задаче. Все используемые обозначения в (1) являются стандартными. Укажем, что M — тензор поляризации, а B — пространство, содержащее в себе начало координат и ограничивающее собой семейство рассеивателей. Если рассматривается только один рассеиватель, то $|B|$ есть его объем.

Рассмотрим задачу, геометрия которой показана на рис. 1. В трехмерном ограниченном пространстве Ω с электрофизическими параметрами $\epsilon_{r\Omega}$, $\mu_{r\Omega}$, $\sigma_{r\Omega}$ расположен электрически малый сферический рассеиватель с радиусом ρ и границей $\partial\rho B$. В центре сферы располагается начало системы координат. Данный рассеиватель является единственным возмущением в пространстве Ω . Электрофизическими параметрами неоднородности являются величины ϵ_{rB} , μ_{rB} , σ_{rB} . На расстоянии d по оси OZ от центра рассеивателя располагается плоская граница $\partial\Omega$ с параметрами $\epsilon_{r\Omega}$, $\mu_{r\Omega}$, $\sigma_{r\Omega}$. На расстоянии s по оси OZ от центра рассеивателя находится источник электромагнитных волн. Индексом r отмечены относительные величины.

Обратим внимание, что в этой работе мы принимаем, что параметры границы $\partial\Omega$ равны параметрам пространства распространения электромагнитных волн Ω . Оставляя границу физической, такой подход допускает быстрый алгоритм решения задачи, позволяющий не учитывать отражение от границы и не вводить многослойную геометрию. Двухслойная модель с сильно проводящей границей рассматривалась в работе [Zeyde et al., 2020]. Алгоритм, предложенный в этой работе, может быть дополнен результатами, полученными в [Zeyde et al., 2020].

Падающая на рассеиватель электромагнитная волна определяется выражением $E_x^{\text{inc}} = E_0 e^{jk_{\Omega}(s-\rho)}$. Величина k_{Ω} — комплексная постоянная, $k_{\Omega} = \omega \sqrt{\mu_{r\Omega} \mu_0 \epsilon_0 \left(\epsilon_{r\Omega} + \frac{j\sigma_{r\Omega}}{\omega\epsilon_0} \right)}$. Значение корня комплексной величины выбирается таким образом, чтобы выражение для падающей волны обеспечивало затухающий характер комплексной амплитуды. Величина E_0 определяет амплитуду электромагнитных волн источника.

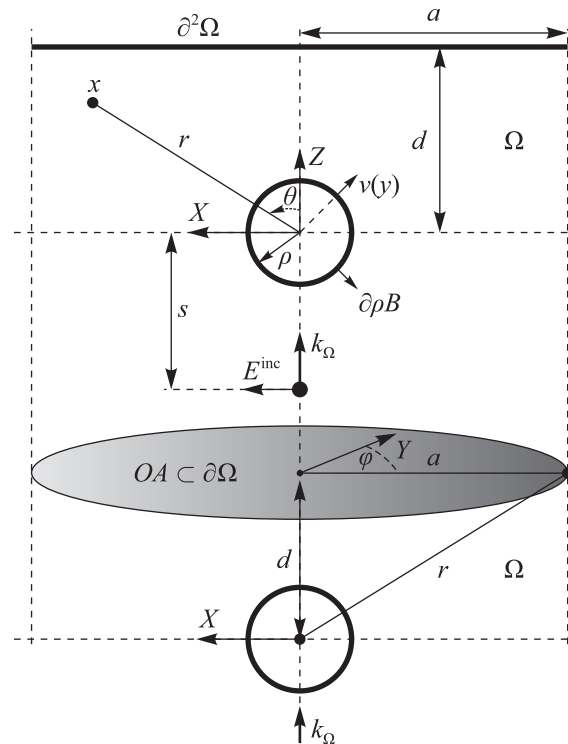


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи: Ω — пространство анализа с границей $\partial\Omega$ (соответственно, $\partial^2\Omega$); a — радиус области наблюдения OA ; x — точка наблюдения с радиус-вектором r ; d — расстояние от границы системы до центра неоднородности; ρ — радиус сферической неоднородности; $\partial\rho B$ — граница неоднородности с внешним нормальным вектором $v(y)$; s — расстояние от центра неоднородности до источника падающего на нее электрического поля напряженностью E^{inc} ; k_Ω — волновое число пространства распространения электромагнитных волн; (X, Y, Z) — оси прямоугольной системы координат с началом в центре сферической неоднородности и соответствующие им координаты в сферическом базисе (r, θ, φ)

Некоторая двумерная поверхность, принадлежащая $\partial\Omega$, задана параметрически в сферическом базисе (r, θ, φ) (согласно геометрии, показанной на рис. 1):

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{\cos \theta}, \\ \theta &= t', \quad t' \in \left[0, \arctan\left(\frac{a}{d}\right)\right], \\ \varphi &= s', \quad s' \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (2)$$

Укажем, что величина a — это радиус поверхности, принадлежащей $\partial\Omega$, векторный поток сквозь которую необходимо получить. Все точки наблюдения за состоянием системы на $\partial\Omega$ расположены на этой поверхности. Далее будем обозначать ее как OA . Цилиндрическая полубесконечная поверхность радиусом a , с одной стороны ограниченная OA , такая, что все ее точки принадлежат Ω , является областью наблюдения — OD . Для полноты картины укажем, что $B \subset OD \subset \Omega$.

Следует отметить, что выделение на поверхности $\partial\Omega$ диска OA таким образом, что $OA \subset \partial\Omega$, является требованием предлагаемого быстрого метода анализа. Мы ограничиваем область нахождения интеграла (1) в той его части, которая не дает сколь-либо существенного вклада в его значение. В действительности основной вклад в решение дает значение интеграла в области малых углов θ . На больших углах, в силу значительных потерь в среде распространения, результат интегрирования существенно не изменяется.

Для начала более подробно рассмотрим интегральное выражение в (1). В этом выражении y — точка на поверхности рассеивателя ($y \in \partial\rho B$), $\mathbf{E}^{01}(\mathbf{y})$ — напряженность электрического поля в точке y в присутствии возмущения, $\mathbf{E}^0(\mathbf{y})$ — напряженность электрического поля в точке y в отсутствие возмущения. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^0(\mathbf{y}) &= \mathbf{E}^{\text{inc}} = \mathbf{E}_0 e^{jk_\Omega(s-\rho)}, \\ \mathbf{E}^{01}(\mathbf{y}) &= \mathbf{E}^{\text{inc}} + |\mathbf{E}^{\text{inc}}| \cdot \mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{E}^{01}(\mathbf{y}) - \mathbf{E}^0(\mathbf{y}) &= E_0 e^{jk_\Omega(k-\rho)} \mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{y}),\end{aligned}\quad (3)$$

где \mathbf{E}^{sc} — рассеянное от неоднородности электрическое поле.

Исследуем поведение подынтегральных функций, на вычисление которых нацелен быстрый алгоритм. Функция отклика (функция Грина для свободного пространства) имеет вид $\Phi^k(x, y) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_\Omega |x - y|)$, где x — точка, принадлежащая Ω . $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка (см., например, [Du Toit, 1990; Paknys, 1992]).

Несложно продифференцировать эту функцию по направлению к нормали $\partial\rho B$. Координаты точки y в сферическом базисе имеют вид $(\rho, \theta_y, \varphi_y)$ (аналогично для точки x), нормальный вектор $\nu(y)$ есть базисный вектор \hat{r} . Расстояние между точками x и y есть

$$D(\theta_y, \varphi_y) = \sqrt{\rho^2 + r_x^2 - 2\rho r_x [\sin \varphi_y \sin \varphi_x \cos(\theta_y - \theta_x) + \cos \varphi_y \cos \varphi_x]}.$$

По определению нормальной производной,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi^k(x, y)}{\partial \nu(y)} &= \nabla \Phi^k(\theta_y, \varphi_y) \hat{r} = \\ &= \frac{jk_\Omega [H_{-1}^{(1)}(k_\Omega D) - H_1^{(1)}(k_\Omega D)] [\rho - r_x (\cos(\theta_y - \theta_x) \sin \varphi_x \sin \varphi_y + \cos \varphi_x \cos \varphi_y)]}{8D}.\end{aligned}\quad (4)$$

Функция $\mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{y})$ может быть получена с использованием теории Ми [Li Na, 2000; Борн, Вольф, 1973]. Решение является классическим, поэтому не будем подробно останавливаться на нем, а ограничимся лишь основными выражениями. Коэффициенты Ми, характеризующие рассеянную волну, известны и равны

$$\begin{aligned}B_n^e &= j^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\dot{N} \psi'_n(q) \psi_n(\dot{N}q) - \psi_n(q) \psi'_n(\dot{N}q)}{\dot{N} \zeta'_n(q) \psi_n(\dot{N}q) - \zeta_n(q) \psi'_n(\dot{N}q)}, \\ B_n^m &= j^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\dot{N} \psi_n(q) \psi'_n(\dot{N}q) - \psi'_n(q) \psi_n(\dot{N}q)}{\dot{N} \zeta_n(q) \psi'_n(\dot{N}q) - \zeta'_n(q) \psi_n(\dot{N}q)},\end{aligned}\quad (5)$$

где $q = \frac{2\pi\rho}{\lambda_\Omega} = \frac{2\pi\rho f \sqrt{\epsilon_r \Omega}}{c}$ и $\dot{N}^2 = \frac{k_B}{k_\Omega}$. Сферические функции, используемые в расчетах (5), имеют следующий вид: $\psi_n(\arg) = \sqrt{\frac{\pi \cdot \arg}{2}} j_n(\arg)$ и $\zeta_n(\arg) = \sqrt{\frac{\pi \cdot \arg}{2}} h_n^{(1)}(\arg)$. Штрихом отмечены производные по аргументу.

Поток векторного поля через поверхность (2) с учетом (3) и (4) есть

$$\int_0^{\arctan(\frac{q}{d})} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} |E_r^{\text{sc}} \cdot \nabla \Phi^k| & |E_\theta^{\text{sc}} \cdot \nabla \Phi^k| & |E_\varphi^{\text{sc}} \cdot \nabla \Phi^k| \\ -\frac{d \cdot \cos \theta_y}{\sin^2 \theta_y} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\varphi_y d\theta_y. \quad (6)$$

Легко видеть, что компонента векторного поля $\widehat{\varphi}$ обнуляется и не участвует в вычислениях, поэтому не имеет смысла считать соответствующую компоненту рассеянного от сферы поля (эта компонента векторного поля не дает вклад в суммарный поток через выделенную на границе поверхность).

Непосредственное компьютерное вычисление интеграла (6) при высокой степени точности является достаточно требовательной к ресурсам задачей. В работе [Colton, Piana, 1998] представлена допустимая аппроксимация (6) для $r \rightarrow \infty$, т.е. в области дальнего поля рассеяния (равносильное условие $D \rightarrow \infty$)

$$\int_{\partial\Omega} u_{\infty}(x, y) g_y(y) ds(y) = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_{\Omega}}} e^{jk_{\Omega}D}, \quad (7)$$

где u_{∞} — функция дальнего поля рассеяния. Введенная аппроксимация по форме совпадает с аппроксимацией дальнего поля излучения точечного источника [Andronov, Sharkova, 2002]. В соответствии с вышеописанным, применяя (7), получаем

$$\int_{OA} [\mathbf{E}^{01}(\mathbf{y}) - \mathbf{E}^0(\mathbf{y})] \frac{\partial \Phi^k(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \approx \widetilde{E}_{\text{scat}} \exp \left[\delta \frac{\pi}{4} + jk_{\Omega}(r_x - \rho) \right] \Big|_{r_x \rightarrow \infty}, \quad (8)$$

где $\widetilde{E}_{\text{scat}}$ — амплитуда электрического поля, рассеянного в сторону OA . По определению ЭПР, имеем

$$\widetilde{E}_{\text{scat}} = \sqrt{\frac{\kappa |C_{\text{scat}}|}{\pi}} \frac{|\mathbf{E}^{\text{inc}}|}{2(r_x - \rho)}, \quad (9)$$

где κ — отношение объема сферического сегмента рассеивающего в сторону OA к объему сферы и C_{scat} — суммарная ЭПР сферы, рассчитываемая с помощью (5) [Li Na, 2000]:

$$\kappa = \frac{1 - \cos \left(\arctan \left[\frac{a}{d} \right] \right)}{2} = \frac{1 - \left(\frac{a^2}{d^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}}{2},$$

$$C_{\text{scat}} = \frac{2\pi}{k_{\Omega}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|B_n^e|^2 + |B_n^m|^2).$$

Переход к ЭПР сферы позволяет, вместо усложнения выражения (1) для учета влияния возмущения от нескольких сфер согласно [Vogelius, Volkov, 2000; Griesmaier, 2011], использовать результаты, представленные в [Ludwig, 1991; Angelakos, Kumagai, 1964]. Формулировки из [Angelakos, Kumagai, 1964] можно с легкостью применить для рассматриваемой геометрии с двумя главными условиями для их использования: во-первых, частота первичной волны должна быть достаточно высокой, и, во-вторых, семейство рассеивателей должно состоять из идентичных друг другу сфер. Одновременно с этим снимается ограничение на значительную разнесенность единичных возмущений, как в [Vogelius, Volkov, 2000; Griesmaier, 2011]: это значит, что сферы могут располагаться достаточно близко друг к другу, вплоть до их соприкосновения (в этом случае их ЭПР можно просто сложить, как это показано в [Штагер, 1986]). Учет взаимного электродинамического влияния нескольких сфер в системе является преимуществом решения дифракционной задачи в рамках теории Ми [Борн, Вольф, 1973].

В рамках разработанного подхода возможно рассмотреть множество вариантов взаимного расположения источника и сфер в пространстве, однако наибольший интерес представляет случай, когда сферы не имеют перекрывающихся поверхностей рассеяния в сторону области наблюдения. Если принять, что расстояние между соседними неоднородностями постоянно и равно l ,

тогда

$$E_{SN} = N_S \tilde{E}_{\text{scat}} \left(1 + \sum_{m=0}^{N_s} e^{jk_{\Omega} ml} \right) + 2(N_S - 1) E_{dr}, \quad (10)$$

где N_S — общее количество сфер в семействе возмущения, E_{dr} — амплитуда напряженности электрического поля, переотраженного от соседних сфер. Согласно [Angelakos, Kumagai, 1964]

$$E_{dr} = E_{\text{scat}} \frac{\rho^2 e^{jk_{\Omega}(l-2\sqrt{2}\rho)}}{4l \sqrt{1 - \frac{\rho}{\sqrt{2}l}}}, \quad (11)$$

где E_{scat} — суммарное рассеянное сферой электрическое поле. Чтобы получить это значение, необходимо использовать выражение из (9) при значении коэффициента $\kappa = 1$.

Выражения (10) и (11) справедливы только в том случае, если семейство рассеивателей принадлежит пространству OD . Начало системы координат располагается в центре ближайшей к источнику сферы, причем они должны располагаться на одной координатной оси (согласно геометрии, представленной на рис. 1). Аппроксимация (8) дополняется выражениями (10) и (11), в которой \tilde{E}_{scat} заменяется на E_{SN} для семейства рассеивателей.

Результаты и обсуждение

В работе [Zeyde et al., 2020] рассматривалась аналогичная проблема, однако аппроксимация (7) не проверялась непосредственным сравнением с результатами вычислений (6). Вместо этого было проведено компьютерное моделирование методом конечных разностей во временной области с последующим интегрированием результатов по обозначенной поверхности OA согласно [Kunz, Luebbers, 1993]. Решение задачи ограничивалось только одной идеально проводящей сферой в поле падающих электромагнитных волн, являющейся рэлеевской частицей.

В данной работе представим результат расчета для следующего набора входных параметров: $\epsilon_{r\Omega} = 4$, $\mu_{r\Omega} = 1$, $\sigma_{\Omega} = 0.012$ См/м, $\epsilon_{rB} = 16$, $\mu_{rB} = 1$, $\sigma_B = 1$ См/м, $\rho = 0.04$ м, $x \in OA$, $d = 3$ м, $a = 2$ м, $s = 0.5$ м, $E_0 = 1$ В/м. Вначале представим некоторые результаты для возмущенной лишь одной сферой системы.

На рис. 2 показан график изменения магнитуды подынтегральной функции (1) в диапазоне изменения углов для точки y , лежащей на поверхности сферы в пределах задания поверхности (2). По данному графику можно провести количественную оценку вносимого одной сферой возмущения в непосредственной близости от нее.

На рис. 3 приведено сравнение зависимостей для возмущенного электрического поля, полученного непосредственным численным интегрированием (6) с максимальной относительной ошибкой порядка 10^{-11} и предложенной аппроксимацией интеграла (8). Легко видеть, что при росте частоты графики функций совпадают с хорошей точностью. При фиксированном значении r_x это в точности соответствует переходу в дальнюю зону рассеяния. Динамика функций в этой области одинакова. Оптимизацией параметра δ в (8) возможно добиться практически полного соответствия амплитуд в этой области.

На рис. 4 показаны частотные зависимости выражения (10) для семейства идентичных рассеивателей, все из которых расположены вдоль оси OX . Области рассеяния в сторону поверхности OA не пересекаются. Минимальное расстояние между сферами $l = 0.1$ м, таким образом, семейство рассеивателей расположено в области OD . Легко наблюдать осциллирующий характер зависимости, связанный с интерференционными процессами, возникающими в области пространства распространения вторичных переотраженных волн. В силу того, что материал сфер является сильно проводящим, эффекты интерференции рефрагированных волн не учитываются.

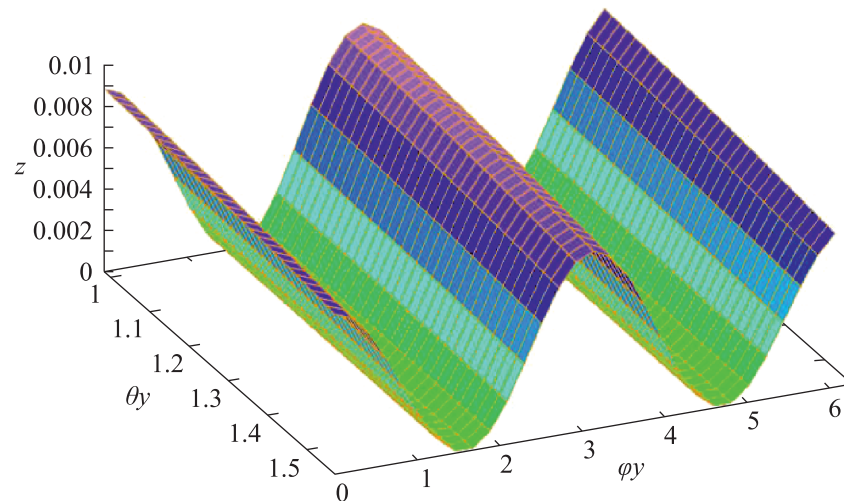


Рис. 2. Абсолютное значение подынтегральной функции (1) для частоты источника $f = 1$ ГГц (z — амплитуда напряженности рассеянного электрического поля в непосредственной близости от неоднородности при изменении угловых координат (θ_y, φ_y) точки y , лежащей на границе неоднородности $\partial\rho B$)

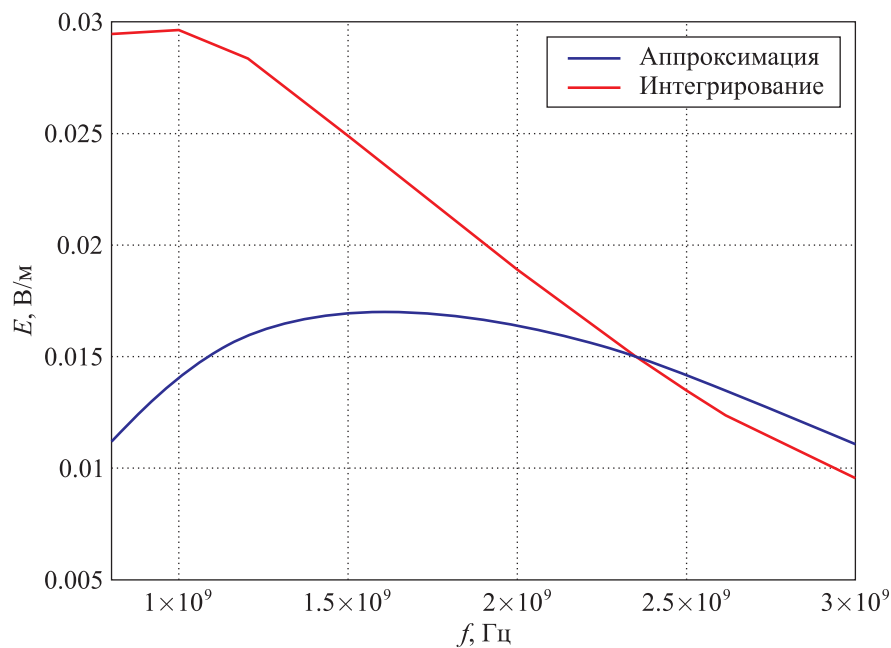


Рис. 3. Сравнение возмущения электрического поля E , полученного численным интегрированием (6) и введенной аппроксимацией (8) при изменении частоты источника f

Легко показать, что, комбинируя выражения из [Eremin et al., 1994; Ludwig, 1991; Angelakos, Kumagai, 1964], возможно получить формулу для возмущения, вызываемого семейством неидентичных рассеивателей; для этого в выражении (10) необходимо использовать сумму ЭПР от соответствующих неоднородностей. Используя данные работы [Kleinman, Senior, 1972], возможно получить ЭПР рэлеевской частицы произвольной формы.

В предложенной формулировке особый интерес может представлять учет возмущений второго порядка. Одним из наиболее значимых в этом контексте эффектов является движение рассеивателя, не вызывающее модуляцию падающего электромагнитного поля (движение с сохранением $\partial\rho B$): вращение или осевое движение осесимметричных тел. В этом изучении основными

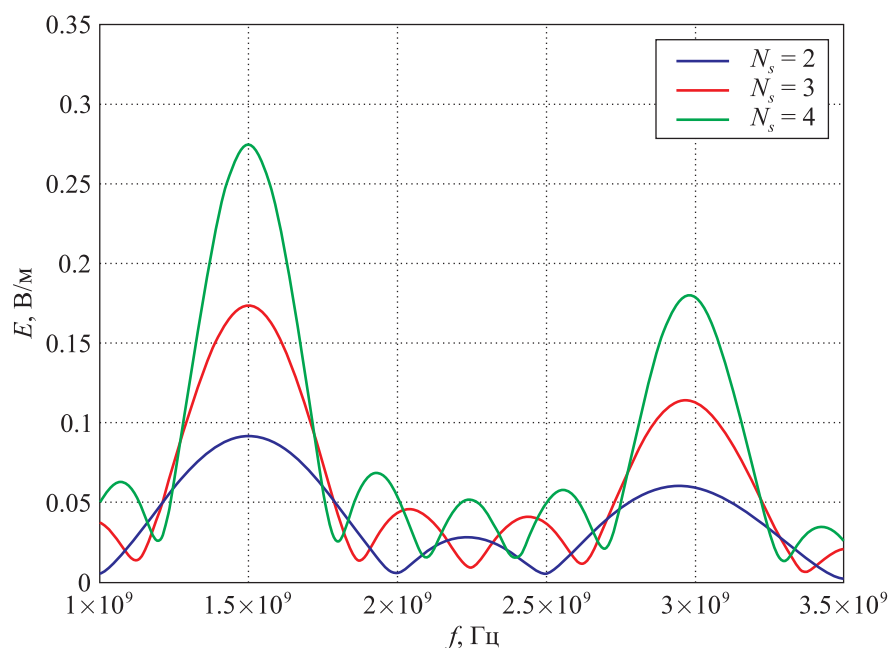


Рис. 4. Частотная зависимость возмущенного электрического поля $E(f)$ для различного числа рассеивателей в области наблюдения, N_s

объектами являются неоднородности в форме сфер и круглых цилиндров. Так, алгоритм анализа рассеянного от вращающегося осесимметричного тела электромагнитного поля показан в [Zeyde, 2018]. В силу полного соответствия геометрии систем, а также в силу того, что для решения задачи рассеяния от движущегося тела применяется теория возмущений, не составляет труда дополнить исходное выражение (1) или его аппроксимацию (7) дополнительными параметрами состояния анализируемой системы.

Выводы

В данной работе приводится эффективный алгоритм анализа возмущения электромагнитного поля в пространстве, содержащем семейство идентичных электрически малых рассеивателей. Обобщенная формула, имеющая строгое математическое доказательство, заменяется аппроксимацией дальней зоны рассеяния, приводится их сравнение. Учет вклада каждого рассеивателя в семействе неоднородностей производится путем перехода к значениям их ЭПР и дальнейшего их суммирования с учетом возникающих волновых эффектов. В статье приводятся ограничения предложенного метода, а также рассматриваются возможные его модификации и дополнения.

Полученные в данной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. На основе общих методов и приемов решения широкого класса граничных задач электродинамики (метод возмущений, метод интегральных уравнений) разработан новый подход для быстрого решения более узких задач, с более конкретной геометрией рассеивателей, в практически значимом контексте. Результаты работы могут найти применение в неразрушающем контроле (дефектоскопии, структуроскопии), дистанционном зондировании и радиомониторинге. Теоретически значимым является разработанный метод анализа возмущения, вносимого в ограниченную электродинамическую систему семейством малых рассеивателей. Данный алгоритм может быть также использован для управления состоянием электродинамической системы малыми контролируемыми возмущениями, что может найти применение при оптимизации антенн или конструировании радиотехнических устройств.

Список литературы (References)

- Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
Born M., Wolf E. Principles of optics. — Pergamon press, 1973. (Russ. ed.: *Born M., Wolf E.* Osnovy optiki. — Moscow: Nauka, 1973 — 720 p.)
- Зейде К. М., Коротков А. Н. Алгоритм сегментирования геометрии диэлектрического объекта по параметру степени малости целевого эффекта наблюдения. Стратификация линзы Лüneберга // Радиотехника. — 2019. — No. 1. — С. 15–23.
Zeyde K. M., Korotkov A. N. Algoritm segmentirovaniya geometrii dielectricheskogo ob'ekta po parametry malost' celevogo effecta nabludeniya, Stratifikaciya linzy Luneberga [The algorithm of segmentation of the geometry of a dielectric object by the parameter of smallness of the target effect of observation. Stratification of Luneburg lens] // Radiotekhnika. — 2019. — No. 1. — P. 15–23 (in Russian).
- Штагер Е. А. Рассеяние радиоволн на телах сложной формы. — М.: Радио и связь, 1986. — 184 с.
Shtager E. A. Rasseyaniye radiovoln na telah slojnoi formy [Radiowaves scattering by a complex-shaped bodies]. — Moscow: Radio i svyaz', 1986. — 184 p.
- Andronov I. V., Sharkova N. M. Electromagnetic field radiated by a point source in an anisotropic layer // IEEE Trans. on antennas and propagat. — 2002. — Vol. 50, No. 9. — P. 1203–1206.
- Angelakos D. J., Kumagai N. High-frequency scattering by multiple spheres // IEEE Trans. on antennas and propagat. — 1964. — Vol. 12, No. 1. — P. 105–109.
- Cedio-Fengya D. J., Moskow S., Vogelius M. S. Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction // Inverse problems. — 1998. — Vol. 14. — P. 553–595.
- Colton D., Piana M. The simple method for solving the electromagnetic inverse scattering problem: the case of TE polarized waves // Inverse problems. — 1998. — Vol. 14. — P. 597–614.
- Du Toit C. F. The numerical computation of Bessel functions of the first and second kind for integer orders and complex arguments // IEEE Trans. on antennas and propagat. — 1990. — Vol. 38, No. 9. — P. 1341–1349.
- Eremin Yu. A., Orlov N. V., Sveshnikov A. G. Electromagnetic scattering analysis based on discrete sources method // ACES Journal. — 1994. — Vol. 9, No. 3. — P. 46–56.
- Griesmaier R. A. A general perturbation formula for electromagnetic fields in presence of low volume scatterers // ESAIM: M2AN. — 2011. — Vol. 45, No. 6. — P. 1193–1218.
- Hong D., Xiao J., Zhang G., Yang S. Characteristics of the sum of cross-components of triaxial induction logging tool in layered anisotropic formation // IEEE Trans. on geoscience and remote sensing. — 2014. — Vol. 52, No. 6. — P. 3107–3115.
- Kleinman R. E., Senior T. B. A. Rayleigh scattering cross section // Radio Science. — 1972. — Vol. 7, No. 10. — P. 937–942.
- Kunz K. S., Luebbers R. J. The finite difference time domain method for electromagnetic. — CRC Press, 1993. — 448 p.
- Li Na N. G. Manipulation of particles on optical waveguide. — University of Southampton, 2000. — 176 p.
- Ludwig A. C. Scattering by two and three spheres computed by the generalized multipole technique // IEEE Trans. on antennas and propagat. — 1991. — Vol. 39, No. 5. — P. 703–705.
- Paknys R. Evaluation of Hankel functions with complex argument and complex order // IEEE Trans. on antennas and propagat. — 1992. — Vol. 40, No. 5. — P. 569–578.
- Vogelius M. S., Volkov D. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 34, No. 4. — P. 723–748.

- Zeyde K. M.* Fast segmentation of a rotating axisymmetric scatterer medium of an arbitrary form for the first order fields numerical analysis // Ural radio engineering journal. — 2018. — Vol. 2, No. 2. — P. 26–39.
- Zeyde K. M., Hong D., Vardugina A. Yu., Mitelman Yu. E.* EM perturbation of the single point PEC scatterer in multilayer structure for GPR // USBEREIT Conf. Proc. — 2020.
- Zeyde K. M., Vardugina A. Yu.* An electrodynamic system manipulation by small controlled perturbations // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2174. — P. 020192.